I PRODOTTI NOTEVOLI

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$$

$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$$

$$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$$

Cosa accade se cerchiamo di calcolare $(a+b)^4$?

$(a+b)^4=(a+b)\cdot(a+b)^3=(a+b)\cdot(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)=$

$=a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

Allora, ripetendo il ragionamento $(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$

Come si può notare, tutti i polinomi sono ordinati, completi e omogenei. Inoltre il numero di monomi che compongono il polinomio finale è sempre uno in più rispetto all'esponente a cui ci viene chiesto di elevare a potenza il binomio di partenza: ad esempio il polinomio che si ottiene dalla potenza 3 è formato da 4 termini, quello della potenza 4 da 5 monomi, e così via. Infine il matematico italiano Nicolò Tartaglia (così chiamato in virtù di un suo evidente difetto di pronuncia) si rese conto di un fatto curioso. Guardate la figura. Cosa si nota?

binomio	**potenza**	**coefficienti**										
$(a+b)^0$	0	1										
$(a+b)^1$	1	1	1									
$(a+b)^2$	2	1	2	1								
$(a+b)^3$	3	1	3	3	1							
$(a+b)^4$	4	1	4	6	4	1						
$(a+b)^5$	5	1	5	10	10	5	1					
$(a+b)^6$	6	1	6	15				1				
$(a+b)^7$	7	1							1			
$(a+b)^8$	8	1								1		
$(a+b)^9$	9	1									1	
$(a+b)^{10}$	10	1										1

Il primo e l'ultimo monomio hanno sempre coefficiente 1, il secondo e il penultimo monomio hanno come coefficienti il valore dell'esponente; e gli altri? Si ottengono sommando a due a due i coefficienti della riga superiore. Consideriamo ad esempio la quinta riga (binomio elevato alla potenza 4): il secondo coefficiente (4) è dato dalla somma del primo (1) e del secondo coefficiente (3) della riga superiore. Il coefficiente 6 della quinta riga è la somma di 3+3 della riga precedente. Se abbiamo capito il meccanismo non dovrebbe essere difficile completare questo schema che prende il nome di TRIANGOLO DI TARTAGLIA.
Se abbiamo fatto tutto a regola d'arte, possiamo scrivere lo sviluppo della potenza 10 del binomio a+b:

$$(a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 100a^7b^3 + 170a^6b^4 + 212a^5b^5 + 170a^4b^6 + 100a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}$$

Come si vede, il polinomio è costituito da 11 termini, tutti ben in scala.

ESEMPI.

$$(5x+3y^2)\cdot(5x-3y^2) = 25x^2 - 9y^4$$

$$\left(\frac{5}{4}k^3 + \frac{3}{7}j^5\right)\cdot\left(\frac{5}{4}k^3 - \frac{3}{7}j^5\right) = \frac{25}{16}k^6 - \frac{9}{49}j^{10}$$

$$(15x+4y^2)^2 = 225x^2 + 120xy^2 + y^4$$

$$\left(-\frac{2}{3}m^3 - \frac{1}{4}n^5\right)^2 = \frac{4}{9}m^6 - \frac{1}{3}m^3n^5 + \frac{1}{16}n^{10}$$

$$(3a^2+2b)^3 = 27a^6 + 54a^4b + 36a^2b^2 + 8b^3$$

$$(2a-b^2)^3 = 8a^3 - 12a^2b^2 + 6ab^4 - b^6$$

$$(2x+3y+4z)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 16xz + 24yz$$

$$(3a-4b+5c)^2 = 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 - 24ab + 30ac - 40bc$$

$$(\frac{1}{2}a + b^2 - c)^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^4 + c^2 + ab^2 - ac - 2b^2c$$

$$(x^2 - 2y^3 - 3z^4)^2 = x^4 + 4y^6 + 9z^8 - 4x^2y^3 - 6x^2z^4 + 12y^3z^4$$

La rappresentazione grafica del prodotto $(a+b)^2$